

# فصل ۱ معادلات مرتبه اول

نگارش: تابستان ۱۳۸۹  
آخرین ویرایش: ۲۹ مهر ۱۳۹۸

در این فصل به حل معادلات مرتبه اول می پردازیم که به شکل کلی  $f(x, y, y') = 0$  هستند. اگرچه در بسیاری از موارد می توان آنها را به شکل  $y' = f(x, y)$  نوشت ولی کمک چندانی به حل آنها نمی کند. به هر حال، بطور معمول درجه معادله را یک در نظر گرفته و توان  $x$  و  $y$  دلخواه خواهند بود و مسلماً جواب عمومی در این معادلات تنها یک ثابت  $C$  حقیقی خواهد داشت. روشهای حل ما مبتنی بر روشهای جبری بوده و جوابها اغلب سراسر هستند و گاهی نیز ناگزیریم تا جوابها را بصورت ضمنی بپذیریم. مانند فصل قبل در اکثر جاها بجای  $y'$  از **فاد لایب نیتز**  $\frac{dy}{dx}$  استفاده می کنیم.

## ۱.۱ معادله تفکیک پذیر

معادله دیفرانسیل مرتبه اول را **تفکیک پذیر** گوئیم اگر بتوان آنرا به شکل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad f(x) dx = g(y) dy$$

نوشت که با انتگرالگیری از طرفین، حاصل بصورت

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy + C$$

بدست می آید و در آن  $C$  ثابت دلخواهی است. در این روش که گاهی **حل معادله با توابع مقدماتی** نیز نامیده می شود، دسته بندی متغیرها در حالتی **جداشدنی** قرار گرفته چنانکه بایستی  $x$  و وابستگان آن در یک طرف و  $y$  و وابستگان آن در طرف دیگر قرار بگیرند. جواب این نوع معادلات، اغلب بصورت **توابع مقدماتی**<sup>۱</sup> است. به مثالهای زیر توجه کنید.

<sup>۱</sup> توابع مقدماتی عبارتند از

$\log_a x, \ln x, a^x, e^x, {}^\circ(D), \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x$   
 $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x, \operatorname{arcsinh} x, \operatorname{arcosh} x, \operatorname{arctanh} x, \operatorname{arcoth} x, \operatorname{sinc} x$

**مثال ۱.۱.۱.** حل معادله دیفرانسیل  $e^x dx - y dy = 0$  با مقدار اولیه  $y(0) = 2$ .

**حل.**

$$\begin{aligned} e^x dx &= y dy \\ \int e^x dx &= \int y dy + C \\ e^x &= \frac{1}{2}y^2 + C \end{aligned}$$

بازای مقدار اولیه  $y(0) = 2$  چون  $e^0 = 2 + C$  لذا  $C = -1$  بوده و  $e^x = \frac{1}{2}y^2 - 1$  جواب خصوصی معادله است. □

**مثال ۲.۱.۱.** معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = y - y^2$  با مقدار اولیه  $y(0) = \frac{1}{2}$  را حل نمایید.

**حل.**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y - y^2} &= dx \\ \int \frac{dy}{y(1 - y)} &= \int dx + C \\ \ln \frac{y}{1 - y} &= x + C \\ y(x) &= \frac{ke^x}{1 + ke^x}, \quad k = e^C > 0 \end{aligned}$$

که  $0 < y < 1$  . بازای  $y(0) = \frac{1}{2}$  داریم  $k = 1$  و  $y(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$  جواب خصوصی معادله است. □

**مثال ۳.۱.۱.** حل معادله  $2yy' = e^x$ .

**حل.**

$$\begin{aligned} 2yy' &= e^x \\ 2y \frac{dy}{dx} &= e^x \\ 2y dy &= e^x dx \\ \int 2y dy &= \int e^x dx + C \\ y^2 &= e^x + C \end{aligned}$$

و جواب عمومی معادله  $y^2 = e^x + C$  خواهد بود. □

مثال ۴.۱.۱. مطلوبست حل معادله  $y' = x^r y^s$ .

حل.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^r y^s \\ dy &= x^r y^s dx \\ \frac{dy}{y^s} &= x^r dx \\ \int \frac{dy}{y^s} &= \int x^r dx + C \\ \frac{-1}{s y^s} &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \end{aligned}$$

□

و جواب عمومی معادله عبارتست از  $0 = x^{r+1} y^s + C y^s + 1$  با  $C < 0$ .

مثال ۵.۱.۱. حل معادله  $y(t^s + 1) dt + (t^r - 3t) dy = 0$ .

حل. اگر عوامل طرفین را بر  $y(t^r - 3t)$  تقسیم کنیم سپس:

$$\begin{aligned} \frac{t^s + 1}{t^r - 3t} dt + \frac{1}{y} dy &= 0 \\ \int \frac{t^s + 1}{t^r - 3t} dt + \int \frac{1}{y} dy &= C \\ \int \frac{t^s + 1}{t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})} dt + \int \frac{1}{y} dy &= C \\ \int \left( \frac{-\frac{1}{3}}{t} + \frac{\frac{s}{3}}{t - \sqrt{3}} + \frac{\frac{s}{3}}{t + \sqrt{3}} \right) dt + \int \frac{1}{y} dy &= C \\ -\frac{1}{3} \ln |t| + \frac{s}{3} \ln |t - \sqrt{3}| + \frac{s}{3} \ln |t + \sqrt{3}| + \ln |y| &= \ln C_1, \quad C = \ln C_1 \\ (t^s - 3)^s y^r &= t C_1 \end{aligned}$$

که در آن  $C_1 = \pm e^{C_1}$  بوده و جواب بازای  $t > \sqrt{3}$  برقرار است. انتخاب ثابت  $\ln C_1$  بجای  $C$  اختیاری است □

و تاثیری روی جواب ندارد.

**مثال ۶.۱.۱.** معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = y^2 + 2y + 2$  را حل نمایید.  
**حل.** با تفکیک متغیرها براحتمی می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2 + 2y + 2} &= dx \\ \int \frac{dy}{y^2 + 2y + 2} &= \int dx + C \\ \arctan(y + 1) &= x + C \\ y &= \tan(x + C) - 1 \end{aligned}$$

□

**مثال ۷.۱.۱.** حل معادله دیفرانسیل  $\int 9x^8 dx + \cos y dy = 0$  با مقدار اولیه  $y(1) = \pi$ .  
**حل.**

$$\begin{aligned} 9x^8 dx &= -\cos y dy \\ \int_1^x 9x^8 dx &= \int_{\pi}^y -\cos y dy \\ x^9 \Big|_1^x &= -\sin y \Big|_{\pi}^y \\ x^9 - 1 &= -\sin y \\ y &= \arcsin(-x^9 + 1) \end{aligned}$$

□

این روش حل، بطور مستقیم منجر به یافتن جواب خصوصی می شود (مانند مثال ۶.۱.۱).

تمرین ۲.۱ .

۱. معادلات تفکیک پذیر زیر را حل کرده و جواب عمومی آنها را بیابید. در مواردی که مقدار اولیه داده شده، جواب خصوصی را نیز پیدا کنید.

- (a)  $\frac{-1}{x^2} dx = dt$  , (b)  $(t + 2e^t) dy + y(1 + 2e^t) dt = 0$   
 (c)  $y' = -4y$  , (d)  $(2 - x) dy + (5 + y) dx = 0$   
 (e)  $y' = y^2 x + y^2$  , (f)  $y' = -3yt^2$   
 (g)  $xy' = 3y$  , (h)  $(x^2 + 1)(y + 1) dx = (x^2 - 3x) dy$   
 (i)  $y' = ye^x$  , (j)  $t dy - \sqrt{1 - y^2} dt = 0$   
 (k)  $y' = x^2 y^3$  , (l)  $(4 - x) dy + (1 + y^2) dx = 0$   
 (m)  $y' = x^2(1 + y^2)$  , (n)  $y' \tan x + \cot y = 0$  ;  $y(0) = 0$   
 (o)  $(1 + x)y' = -3y$  , (p)  $y' = x \cos y$  ;  $x(\frac{\pi}{2}) = 1$   
 (q)  $y' + \cos x e^y = 0$  , (r)  $y' + y = y(xe^{x^2} + 1)$  ;  $y(0) = 1$

۲. معادله دیفرانسیل تمام سهمی‌هائی را بدست آورید که محور تقارن آنها محور طولهاست. سپس آنها را حل کنید.

### ۳.۱ معادلات همگن (متجانس)

تابع  $f(x, y) = 0$  را روی بازه حقیقی  $I$  همگن از درجه  $\alpha$  گوئیم اگر برای هر  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  داشته باشیم  
 $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$  و  $tx, ty \in I$ . در زیر توابعی همگن بترتیب از درجه ۱ و  $5/0$  و  $0$  آمده است:

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 5y^2}{4x}$$

$$\Rightarrow f(tx, ty) = \frac{3(tx)^2 + 5(ty)^2}{4(tx)} = \frac{t^2(3x^2 + 5y^2)}{4tx} = tf(x, y) \Rightarrow \alpha = 1$$

$$f(x, y) = \sqrt{x - y}$$

$$\Rightarrow f(tx, ty) = \sqrt{tx - ty} = \sqrt{t} \sqrt{x - y} = t^{1/2} f(x, y) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$f(x, y) = \frac{2x^2y - y^3}{xy^2}$$

$$\Rightarrow f(tx, ty) = \frac{2(tx)^2(ty) - (ty)^3}{(tx)(ty)^2} = \frac{t^3(2x^2y - y^3)}{t^3(xy^2)} = f(x, y) \Rightarrow \alpha = 0$$

در حالت خاص معادله دیفرانسیلی که طرف راست آن تابع  $f(x, y)$  همگن از درجه صفر است، یعنی در شرط  $f(tx, ty) = f(x, y)$  صدق کند را می توان حل نمود. برای حل معادلات به روش همگن از درجه صفر، ابتدا باید شکل معادله را بصورت  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  یا  $y' = f(x, y)$  بنویسیم و در مورد همگن بودن  $f(x, y)$  تحقیق نمائیم. سپس با تغییر متغیر  $y = ux$  و مشتق آن  $y' = u'x + u$  معادله را بر حسب  $x$  و  $u$  بشکل زیر ساده کنیم:

$$u'x + u = f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, u)$$

پس از حل معادله  $u$  بر حسب  $x$ ، متغیر را با جایگزینی  $u = \frac{y}{x}$  به متغیر اولیه برمی گردانیم.

**مثال ۱.۳.۱.** مطلوبست حل معادله

$$y' = \frac{2y^2 + x^2}{xy^2}$$

**حل.** شرط همگن بودن را برای تابع سمت راست بررسی می کنیم:

$$f(tx, ty) = \frac{2(ty)^2 + (tx)^2}{(tx)(ty)^2} = \frac{t^2(2y^2 + x^2)}{t^3(xy^2)} = \frac{2y^2 + x^2}{xy^2} = f(x, y)$$

بنابراین معادله همگن از درجه صفر است. با جانشینی  $y = ux$  و  $y' = u'x + u$  داریم:

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{2(ux)^2 + x^2}{x(ux)^2} \\ u'x + u &= \frac{x^2(2u^2 + 1)}{x^2u^2} \\ u'x &= \frac{2u^2 + 1}{u^2} - u \\ u'x &= \frac{u^2 + 1}{u^2} \\ \frac{du}{dx}x &= \frac{u^2 + 1}{u^2} \\ \int \frac{u^2}{u^2 + 1} du &= \int \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| &= \ln |x| + \ln C, \quad x > 0 \\ \sqrt{u^2 + 1} &= C|x| \\ \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} &= C|x| \\ y^2 &= kx^2 - x^2, \quad x > 0, \quad k = C^2 \\ y &= x\sqrt{kx^2 - 1} \end{aligned}$$

□

که برای  $x > k^{-1/2}$  تعریف شده است.

**مثال ۲.۳.۱.** مطلوبست حل معادله  $x dy - y dx - \sqrt{x^2 - y^2} dx = 0$  می نویسیم  $x dy = (y + \sqrt{x^2 - y^2}) dx$  لذا  $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$  شرط همگن بودن را بررسی می کنیم:

$$f(tx, ty) = \frac{ty + \sqrt{t^2x^2 - t^2y^2}}{tx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} = f(x, y)$$

بنابراین معادله همگن از درجه صفر است. با جانشینی  $y = ux$  و  $y' = u'x + u$  می نویسیم:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \\ u'x + u &= \frac{ux + \sqrt{x^2 - (ux)^2}}{x} \\ u'x + u &= u + \sqrt{1 - u^2} \\ \frac{du}{dx}x &= \sqrt{1 - u^2} \\ \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} &= \int \frac{dx}{x} + C \\ \arcsin u &= \ln x + C, \quad x > 0 \\ y &= x \sin(\ln x + C) \end{aligned}$$

□

که برای  $x > 0$  تعریف شده است.

### مطلب ۱.۱

در معادلاتی به شکل  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  که  $M(x, y)$  و  $N(x, y)$  هر دو توابعی همگن از درجه  $\alpha$  هستند می توان با تشکیل نسبت

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$$

آنرا به معادله ای همگن از درجه صفر تبدیل نمود.

در این حالت، توابع  $M$  و  $N$  را توابع متجانس گوئیم.

از طرفی نیز با تغییر متغیر  $y = ux$  و دیفرانسیل آن  $dy = x du + u dx$  و جایگذاری در معادله اولیه داریم:

$$\begin{aligned} M(x, ux) dx + N(x, ux)(x du + u dx) &= 0 \\ x^\alpha M(\lambda, u) dx + x^\alpha N(\lambda, u)(x du + u dx) &= 0 \\ (M(\lambda, u) + uN(\lambda, u)) dx + xN(\lambda, u) du &= 0 \\ -\ln x &= \int \frac{N(\lambda, u)}{M(\lambda, u) + uN(\lambda, u)} du + C \end{aligned}$$

تمرین ۴.۱ .

۱. معادلات همگن زیر را حل نمائید.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad x + y &= xy' & , \quad (b) \quad (x^2 + y^2) dx + xy dy &= 0 \\
 (c) \quad (x^2 - y^2) dx + 2xy dy &= 0 & , \quad (d) \quad (2ye^{\frac{y}{x}} - x)y' + (2x + y) &= 0 \\
 (e) \quad (x - 2y) dx + (2x + y) dy &= 0 & , \quad (f) \quad (xy + y^2)y' + (xy + x^2) &= 0 \\
 (g) \quad xy' &= y + x \sin \frac{y}{x} & , \quad (h) \quad xy' &= y(\ln x - \ln y) + y
 \end{aligned}$$

۲. نشان دهید که اگر در معادله مرتبه اول  $y' = f(x, y)$  تابع  $f(x, y)$  همگن از درجه صفر باشد با تغییر متغیر  $y = ux$  می توان آنرا تفکیک نموده و بنویسیم:

$$\ln |x| = \int \frac{du}{f(1, u) - u}$$

## ۵.۱ تبدیلات متفرقه

مانند حل معادلات همگن که تبدیل  $y = ux$  بکار گرفته می شود، برخی معادلات نیز با جانشینی برخی عبارات مفید و تبدیلات سودمند ساده تر خواهند شد.  
(الف) معادله دیفرانسیل به شکل

$$y' = g(ax + by + c), \quad b \neq 0$$

به کمک تبدیل  $u = ax + by + c$  به معادله تفکیک پذیر  $u' = a + bg(u)$  تبدیل می شود.

**مثال ۱.۵.۱.** حل معادله  $y' = (4x - y + 1)^2$  با مقدار اولیه  $y(0) = -3$ .  
**حل.** با فرض  $u = 4x - y + 1$  و با مشتقگیری از طرفین و سپس جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned}
 u' &= 4 - y' \\
 \frac{du}{dx} &= 4 - u^2, \quad u(0) = 4 \\
 \frac{du}{4 - u^2} &= dx \\
 \int \frac{du}{4 - u^2} &= \int dx + C \\
 \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u+2}{u-2} \right| &= x + C, \quad u(0) = 4 \\
 u(0) = 4 &\Rightarrow C = \frac{1}{4} \ln 3 \\
 y &= 4x - 1 - \frac{4}{3e^{4x} - 1}
 \end{aligned}$$

□

(ب) برای معادله دیفرانسیل به شکل

$$y' = g\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right), \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}, \quad b, b' \neq 0$$



که حالت کلی تر (الف) است و آنرا **معادله زاكوبی** نامند، اگر  $(s, t)$  جواب دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

باشد <sup>۲</sup> پس با تغییر متغیرهای  $y = v + t$  و  $x = u + s$  معادله زاكوبی به معادله همگن با متغیرهای  $u$  و  $v$  تبدیل می شود. اما اگر  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$  باشد، چون  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$  است، جانشین مناسب جهت حل معادله دیفرانسیل،  $u = ax + by$  خواهد بود که به معادله ای **تفکیکی پذیر** مبدل می گردد.

**مثال ۲.۵.۱.** حل معادله

$$(x + y - 3) dx - (x - y + 1) dy = 0$$

**حل.** می نویسیم  $y' = \frac{x + y - 3}{x - y + 1}$  و دستگاه  $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$  دارای جواب است زیرا  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$  با حل دستگاه و یافتن جواب  $(1, 2)$  جانشینی های  $x = u + 1$  و  $y = v + 2$  را در نظر گرفته و با دیفرانسیل گیری و جایگذاری داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y + 1}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}$$

$$z'u + z = \frac{1 + z}{1 - z}, \quad v = zu \text{ معادله همگن با جانشین}$$

$$\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{u} du + C$$

$$\arctan z - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) = \ln |u| + \ln C$$

$$\arctan \left( \frac{v}{u} \right) = \ln \left( C |u| \sqrt{1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2} \right)$$

$$\arctan \left( \frac{y - 2}{x - 1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \right) + C$$

□

(ج) برخی از معادلات را می بایست با تبدیلات دلخواه ساده نمود. یافتن اینگونه تبدیلات وابسته به تجربه است.

**مثال ۳.۵.۱.** حل معادله

$$y(3x^2 + 2y^2 - 7) dy - x(4x^2 + 3y^2 - 7) dx = 0$$

<sup>۲</sup> شرط وجود جواب دستگاه اینست که  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

**حل.** با فرض  $x^2 = X$  و  $y^2 = Y$  و سپس دیفرانسیل از آنها  $2x dx = dX$  و  $2y dy = dY$  و با جایگذاری داریم

$$(3X + 2Y - 7)dY - (8X + 3Y - 7)dX = 0$$

برای تغییر متغیرهای  $X = u + s$  و  $Y = v + t$  نیاز به یافتن ثابتهای  $s$  و  $t$  است پس:

$$\begin{cases} 3X + 2Y - 7 = 0, \\ 8X + 3Y - 7 = 0. \end{cases} \Rightarrow s = -1, t = 5$$

و معادله با تغییر متغیرهای  $Y = v + 5$  و  $X = u - 1$  به معادله همگن

$$\frac{dv}{du} = \frac{8u + 3v}{3u + 2v}$$

تبدیل می شود. پس از حل معادله بروش همگن داریم  $(v - 2u)^2(v + 2u) = C$  که با برگردان متغیرها به  $x$  و  $y$  جواب عمومی عبارتست از تابع ضمنی

$$(y^2 - 2x^2 - 7)^2(y^2 + 2x^2 - 3) = C$$

□

(د) گاهی اوقات جابجا کردن متغیر مستقل و وابسته به حل معادله کمک می کند. به مثال زیر دقت نمایید:

**مثال ۴.۵.۱.** حل معادله دیفرانسیل

$$(1 + 2e^{\frac{x}{y}}) dx + 2e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

**حل.** با تعویض  $x$  و  $y$  معادله چنین می شود

$$(1 + 2e^{\frac{y}{x}}) dy + 2e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dx = 0$$

می نویسیم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^{\frac{y}{x}} \left(1 - \frac{y}{x}\right)}{1 + 2e^{\frac{y}{x}}}$$

با بررسی اینکه معادله همگن از درجه صفر است و با جانشینی  $y = ux$  داریم:

$$\begin{aligned} u'x + u &= -\frac{2e^u(1-u)}{1+2e^u} \\ u'x &= \frac{-2e^u - u}{1+2e^u} \\ \frac{du}{dx}x &= \frac{-2e^u - u}{1+2e^u} \\ \frac{1+2e^u}{-2e^u - u} du &= \frac{dx}{x} \\ -\int \frac{1+2e^u}{2e^u + u} du &= \int \frac{dx}{x} + C \\ -\ln|2e^u + u| &= \ln|x| + \ln C \\ 2e^u + u &= \frac{1}{Cx} \\ 2e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} &= \frac{1}{Cx} \\ 2ye^{\frac{x}{y}} + x &= k, \quad k = \frac{1}{C} \end{aligned}$$

□

مثال ۵.۵.۱. حل معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{y - xy^2}{x^2y + x}$$

**حل.** این معادله همگن و **تفکیک پذیر** نبوده ولی می توان با جانشینی  $ux^n$  بجای  $y$ ، بازی مقدار مناسبی از  $n$  آنرا حل کرد. در ادامه معادله چنین می شود:

$$\begin{aligned} u'x^n + nx^{n-1}u &= \frac{ux^n - xu^2x^{2n}}{x^2ux^n + x} \\ u'x^n &= \frac{ux^n - u^2x^{2n+1}}{ux^{n+2} + x} - nx^{n-1}u \\ u'x^n &= \frac{ux^n(1-n) - u^2x^{2n+1}(1+n)}{ux^{n+2} + x} \end{aligned}$$

کافیست در صورت طرف راست معادله، مقدار  $1+n$  را صفر قرار دهیم و با اینکار بزرگترین توان عامل از بین خواهند رفت و با جایگذاری  $n = -1$  معادله به

$$u' = \frac{2u}{x(u+1)}$$

تبدیل شده که **تفکیک پذیر** است. جواب این معادله  $u + \ln u = 2 \ln x + C$  است که با بازگرداندن متغیر  $u = xy$  جواب عمومی، تابع ضمنی

$$xy + \ln y - \ln x = C$$

□

خواهد بود.

تمرین ۶.۱.

۱. معادلات زیر را با روش تغییر متغیر حل کنید:

- (a)  $(x - y) dx + dy = 0$  , (b)  $y' = \sin(x + y)$   
 (c)  $\tan^2(t + y) dt - dy = 0$  , (d)  $y(xy + 1) dx + x(1 + xy + x^2 y^2) dy = 0$   
 (e)  $y' = \frac{3y - 2x}{x}$  , (f)  $(-4x - y + 4) dx + (4y + x - 1) dy = 0$   
 (g)  $y' = (2x - y + 1)^2$  , (h)  $\frac{dy}{dx} = (y - 4x)^2$   
 (i)  $y' = \frac{2x + 2y - 5}{3x + 3y - 7}$  , (j)  $(4x - y + 7) dx + (2x + y - 1) dy = 0$

۲. معادلات دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر  $y = ux^n$  بازاء مقدار مناسبی از  $n$  حل نمایید.

$$(a) y' = \frac{1 - 3x^2 y^2}{2x^2 y} , (b) y' = \frac{2xy^2}{1 - x^2 y} , (c) y' = \frac{y - 2xy^2}{x}$$

## ۷.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل

بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به شکل

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1.1)$$

نوشت. این شکل از معادله اگر دارای شرط **کامل** بودن باشد، دارای جوابی بصورت تابع ضمنی  $f(x, y) = C$  است. این روش حل معادله از مهمترین روشها در حل معادلات مرتبه اول بشمار می رود. در ابتدا به مفهوم کامل بودن می پردازیم.

معادله دیفرانسیل (۱.۱) را **معادله کامل** گوئیم اگر دیفرانسیل یک تابع باشد، یعنی تابعی پیوسته مانند  $f(x, y) = C$  چنان وجود داشته باشد که

$$df(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1a)$$

از طرفی طبق قاعده مشتق ضمنی تابع  $f(x, y) = C$  می نویسیم:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (1b)$$

با مقایسه (۱a) و (۱b) داریم  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  و  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ . همچنین از آنجا که برای تابعی با مشتقات پیوسته همواره

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

می توان شرط کامل بودن را بصورت

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

نوشت که شرط لازم برای کامل بودن معادله (۱.۱) است. بلعکس، اگر  $M(x, y)$  و  $N(x, y)$  مشتقات جزئی اول آنها در ناحیه ای مثل  $D$  از صفحه  $xy$  پیوسته باشند، با فرض  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  چنین  $f$  پیوسته ای وجود دارد: فرض کنید  $(x_0, y_0)$  نقطه ای در دامنه جواب  $D$  است<sup>۴</sup>، بنابر  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  داریم:

$$\begin{aligned} f &= \int_{x_0}^x M(x, y) dx + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M dx + g'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + g'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + g'(y) \quad ; \quad \left( \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \right) \\ N(x, y) &= N(x, y) - N(x_0, y) + g'(y) \quad ; \quad \left( \frac{\partial f}{\partial y} = N \right) \\ g'(y) &= N(x_0, y) \\ g(y) &= \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C \\ \Rightarrow f(x, y) &= \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C \quad (۲) \end{aligned}$$

که براحتی با مشتگیری ثابت می شود که این تابع بدست آمده در شرط مذکور صدق می کند. لذا چنین ثابت کردیم:

<sup>۴</sup> دامنه جواب لزوماً باید همبند ساده فرض شود تا مشتقات جزئی به درون انتگرال بروند

## مطلب ۱.۲

معادله  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  کامل است اگر  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ . برای حل یک معادله کامل، از آنجائیکه  $f$  و  $M$  و  $N$  توابعی دو متغیره از  $x$  و  $y$  هستند، از رابطه  $\frac{\partial f}{\partial x} = M$  می نویسیم:

$$f = \int M dx + g(y) \quad (۳)$$

که  $g(y)$  تابعی فقط بر حسب  $y$  است. برای یافتن  $g(y)$  چون  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  است، از این رابطه  $g(y)$  را بدست آورده و بنابراین جواب عمومی  $f(x, y) = C$  حاصل می شود.

واضح است که این جواب عمومی  $f(x, y) = C$  توسط معادله (۲) نیز تعیین می گردد.

**مثال ۱.۷.۱.** بررسی کنید که معادله دیفرانسیل  $(3x^2 - e^y) dy + (xy + y^2 - 1) dx = 0$  کامل است یا خیر؟

**حل.** ضریب  $dx$  را  $M$  و ضریب  $dy$  را  $N$  می گیریم. داریم

$$\begin{cases} xy + y^2 - 1 = M \\ 3x^2 - e^y = N \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$$

□ که برابر نبوده و معادله کامل نیست.

**مثال ۲.۷.۱.** کامل بودن معادله  $(2 + ye^{xy}) dx + (xe^{xy} - 1) dy = 0$  را بررسی کنید.

**حل.** چون

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= e^{xy} + xye^{xy} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} \end{aligned}$$

□ و معادله کامل است.

**مثال ۳.۷.۱.** حل معادله  $(x^2 + 1) dy + (2xy) dx = 0$ .

**حل.** می نویسیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

بنابراین معادله کامل است. طبق مطلب ۱,۲ چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x, y) = \int M \, dx + g(y) &\Rightarrow f = \int (2xy) \, dx + g(y) \\ &\Rightarrow f = x^2 y + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N &\Rightarrow x^2 + g'(y) = x^2 + 1 \\ &\Rightarrow g'(y) = 1 \\ &\Rightarrow g(y) = y + C \end{aligned}$$

□

و  $f(x, y) = x^2 y + y + C = 0$  تابع مورد نظر بوده، حل تمام است.

**مثال ۴.۷.۱.** مطلوبست حل معادله دیفرانسیل  $(2xy + e^y) \, dx + (x^2 + xe^y) \, dy = 0$ . **حل.** می نویسیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x + e^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x + e^y \end{aligned}$$

پس معادله کامل است:

$$\begin{aligned} f(x, y) = \int M \, dx + g(y) &\Rightarrow f = \int (2xy + e^y) \, dx + g(y) \\ &\Rightarrow f = x^2 y + e^y x + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N &\Rightarrow x^2 + e^y x + g'(y) = x^2 + xe^y \\ &\Rightarrow g'(y) = 0 \\ &\Rightarrow g(y) = C \\ &\Rightarrow f(x, y) = x^2 y + e^y x + C = 0 \end{aligned}$$

□

## مطلب ۱.۳

روش حل بیان شده در مطلب ۱.۲ را، در مواردی که انتگرال  $N$  آسانتر محاسبه می شود می توان بصورت زیر چنان انجام داد که چون  $\frac{\partial f}{\partial y} = N$  می توان مقدار  $f$  را از رابطه

$$f = \int N dy + h(x) \quad (۴)$$

محاسبه نمود که  $h(x)$  تابعی صرفاً بر حسب  $x$  است. سپس از  $M = \frac{\partial f}{\partial x}$  مقدار  $h(x)$  را بدست آورده  $f(x, y) = C$  را می یابیم.

ذکر این گفته ضروری است که در هر دو روش (۳) و (۴) برای بدست آوردن توابع  $g(y)$  و  $h(x)$  لزوماً باید این توابع تک متغیره باشند وگرنه یا معادله کامل نبوده و یا در محاسبات دچار اشکال شده ایم.

تمرین ۸.۱. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش معادله کامل حل کنید.

- (a)  $y dx + x dy = 0$  , (b)  $(3x^2 - y) dx + (3y^2 - x) dy = 0$   
 (c)  $(2xy - 2y) dx + (x^2 - 2x) dy = 0$  , (d)  $\sin y dx + (x \cos y + 1) dy = 0$   
 (e)  $(ye^{xy} + 2) dx + (xe^{xy} - 2y) dy = 0$  , (f)  $(1 + r \cos \theta) d\theta + \sin \theta dr = 0$

تمرین ۹.۱. معادله دیفرانسیل مثال ۲.۷.۱ را حل کنید.

## ۱.۹.۱ عامل انتگرال ساز

همیشه چنین نیست که معادله به شکل  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  کامل باشد. اما در پاره ای حالات می توان آن را به معادله کامل تبدیل کرد. اگر معادله ای کامل نباشد، می توان با ضرب آن در **عامل انتگرال ساز**<sup>۵</sup>، آنرا به معادله ای کامل تبدیل نمود. تابع  $I(x, y)$  یک **عامل انتگرال ساز** برای  $M dx + N dy = 0$  است اگر  $I(M dx + N dy) = 0$  کامل باشد.<sup>۶</sup>

برای مثال  $\frac{-1}{x^2}$  **عامل انتگرال ساز** برای معادله غیر کامل  $y dx - x dy = 0$  است زیرا با ضرب عامل در معادله داریم  $\frac{-1}{x^2} y dx - \frac{-1}{x^2} x dy = 0$  و یا  $\frac{-y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy = 0$  که یک معادله کامل است. البته  $\frac{-1}{x^2}$  تنها **عامل انتگرال ساز** نبوده و در حقیقت هر معادله دارای بیشمار **عامل انتگرال ساز** است.

حال فرض کنید تابع  $I(x, y)$  یک **عامل انتگرال ساز** برای معادله غیر کامل  $M dx + N dy = 0$  بوده و

<sup>۵</sup> Integrating Factor

<sup>۶</sup> <http://mathworld.wolfram.com/IntegratingFactor.html>



$IM dx + IN dy = 0$  معادله‌ای کامل است بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial(IM)}{\partial y} &= \frac{\partial(IN)}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} M + I \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial I}{\partial x} N + I \frac{\partial N}{\partial x} \\ I \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= \frac{\partial I}{\partial x} N - \frac{\partial I}{\partial y} M \quad (5)\end{aligned}$$

واضح است که حالات مختلفی را می‌توان از این رابطه برحسب  $M$  و  $N$  استخراج کرد. سه حالت خاص را مدنظر قرار می‌دهیم:

(الف)  $I$  تنها تابعی از  $x$  است، پس  $\frac{\partial I}{\partial y} = 0$  و رابطه (5) بصورت  $\frac{\partial I}{I} = p(x) dx$  خواهد بود که

$$p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

و در نتیجه تابع  $I = e^{\int p(x) dx}$  عامل انتگرال‌ساز است.

(ب)  $I$  تنها تابعی از  $y$  است  $\frac{\partial I}{\partial x} = 0$  و رابطه (5) بشکل  $\frac{\partial I}{I} = p(y) dy$  در می‌آید که

$$p(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

و در این حالت نیز تابع  $I = e^{\int p(y) dy}$  عامل انتگرال‌ساز می‌باشد.

بنابراین در مواقعی که معادله کامل نیست و  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  حاصل عبارت  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$  را بدست می‌آوریم

و یکی از دو مقدار  $p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$  یا  $p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$  را محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار تابعی از  $x$  بود،

**عامل انتگرال‌ساز**  $I = e^{\int p dx}$  و اگر این مقدار تابعی از  $y$  باشد، **عامل انتگرال‌ساز**  $I = e^{\int p dy}$  خواهد بود. (ج) با فرض  $z = xy$  در معادله  $M dx + N dy = 0$  که  $M = y g(z)$  و  $N = x h(z)$  اگر

$$p(z) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{z(h - g)}$$

تابعی از  $z$  باشد، تابع  $I = e^{\int p(z) dz}$  عامل انتگرال‌ساز معادله است.

**مثال ۱.۹.۱.** مطلوبست حل معادله  $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$ .

**حل.** چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبه **عامل انتگرال‌ساز** از آنجا که مقدار

$$p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y - 0}{y} = 2$$

تابعی ثابت است، حاصل  $I = e^{\int p \, dx} = e^{\int 2 \, dx} = e^{2x}$  **عامل انتگرال‌ساز** بوده و با ضرب آن در طرفین معادله داریم:

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \, dx + (ye^{2x}) \, dy = 0$$

شرایط کامل بودن را مجدداً بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{2x} 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{2x}$$

بنابراین معادله کامل است و در نتیجه

$$f = \int N \, dy + g(x) \Rightarrow f = \int (ye^{2x}) \, dy + g(x)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} e^{2x} y^2 + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \Rightarrow e^{2x} y^2 + g'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = e^{2x}(x^2 + x)$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 e^{2x} + C$$

$$\Rightarrow f(x, y) = x^2 e^{2x} + y^2 e^{2x} + C = 0$$

و حل تمام است. □

**مثال ۲.۹.۱.** مطلوبست حل معادله  $y' + 2xy = y$ .  
**حل.** در این معادله که  $(2xy - y) \, dx + dy = 0$  می‌بینیم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

پس معادله کامل نیست. برای محاسبه **عامل انتگرال‌ساز** و تبدیل آن به معادله کامل داریم:

$$p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2x - 1}{-y(2x - 1)} = \frac{-1}{y}$$

یعنی  $I = e^{\int \frac{-1}{y} \, dy} = \frac{1}{y}$

$$(2x - 1) \, dx + \frac{1}{y} \, dy = 0$$

پس از بررسی شرایط کامل بودن، بوضوح معادله **تکبیک پذیر** است لذا

$$\begin{aligned}\int (2x - 1) dx + \int \frac{1}{y} dy &= C \\ x^2 - x + \ln |y| &= C \\ y &= ke^{-x^2+x}\end{aligned}$$

□

جواب عمومی معادله است.

**مثال ۳.۹.۱.** حل معادله  $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$  با نگارش معادله بشکل  $(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$  و بررسی شرط معادله کامل

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

پس معادله کامل نبوده و برای محاسبه **عامل انتگرال‌ساز** و تبدیل آن به معادله کامل می نویسیم:

$$p = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

$I = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$  **عامل انتگرال‌ساز** بوده که با ضرب آن در طرفین معادله

$$(3x^2y + xy^2) dx + (x^3 + x^2y) dy = 0$$

بدست می آید. با بررسی شرط معادله کامل، آنرا بروش کامل حل می کنیم که جواب عمومی تابع ضمنی

□

$$x^2y + \frac{1}{3}x^3y^2 = C$$

**مثال ۴.۹.۱.** حل معادله  $y(1 - x^2y^2) dx + x dy = 0$  **حل.** طبق مورد (ج) ذکرشده در فوق با فرض  $z = xy$  داریم  $M = y.g(z)$  و  $N = x.h(z)$  که  $g = 1 - z^2$  و  $h = 1$  و از طرفی

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -z^2 + 1 - 2z^2 - 1 = -3z^2$$

در ادامه

$$p(z) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{z(h-g)} = \frac{-3z^2}{z(1-1+z^2)} = \frac{-3}{z}$$

که تابعی از  $z$  بوده و تابع

$$I = e^{\int p(z) dz} = e^{\int -\frac{3}{z} dz} = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{x^3y^3}$$

عامل انتگرال‌ساز معادله است. با ضرب عامل انتگرال‌ساز  $I$  در معادله چنین حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{x^2 y^2} dy = 0$$

و معادله با شرط  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-2}{x^2 y^3}$  کامل شده پس

$$\begin{aligned} f(x, y) = \int M dx + g(y) &\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2x^2 y^2} - \ln x + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N &\Rightarrow \frac{1}{x^2 y^3} - 0 + g'(y) = \frac{1}{x^2 y^3} \\ &\Rightarrow g'(y) = 0 \\ &\Rightarrow g(y) = C \\ &\Rightarrow f(x, y) = \frac{-1}{2x^2 y^2} - \ln x = C \end{aligned}$$

مثال انتهایی بخش را چگونه ای متفاوت با روش های فوق حل خواهیم نمود. در اینجا مستقیماً با ضرب معادله در تابعی مجهول و این فرض که معادله کامل خواهد شد عامل انتگرال‌ساز را بدست خواهیم آورد.

□

**مثال ۵.۹.۱.** حل معادله  $(6y dx - 4x dy) + x^2 y^3 (15y dx + 3x dy) = 0$  با ضرب این معادله در عامل  $x^\alpha y^\beta$  می‌نویسیم:

$$(6x^\alpha y^{\beta+1} dx - 4x^{\alpha+1} y^\beta dy) + (15x^{\alpha+2} y^{\beta+2} dx + 3x^{\alpha+2} y^{\beta+2} dy) = 0$$

با فرض اینکه عبارت، دیفرانسیل کامل یک تابع است، مطابق توانهای موجود بایستی داشته باشیم:

$$\begin{aligned} d(x^{\alpha+1} y^{\beta+1}) &= (\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+1} dx + (\beta+1)x^{\alpha+1} y^\beta dy \\ d(x^{\alpha+2} y^{\beta+2}) &= (\alpha+3)x^{\alpha+2} y^{\beta+2} dx + (\beta+4)x^{\alpha+2} y^{\beta+2} dy \end{aligned}$$

با تشکیل تشابهات بین پرانتزها و دیفرانسیل‌ها می‌بایست داشته باشیم

$$\frac{\alpha+1}{6} = \frac{\beta+1}{-4}, \quad \frac{\alpha+3}{15} = \frac{\beta+4}{3} \Rightarrow \alpha = 2, \quad \beta = -3$$

□

با ضرب عامل  $x^2 y^{-3} = x^2 y^{-3}$  در معادله، جواب عبارتست از  $2x^2 y^{-2} + 3x^5 y = C$

تمرین ۱۰.۱ .

۱. معادلات دیفرانسیل زیر را با یافتن عامل انتگرال‌ساز حل کنید.

- (a)  $x dy - y dx = 0$  , (b)  $2x \sin 3y dx + 3x \cos 3y dy = 0$   
 (c)  $(3xy + 2y^2) dx + (x^2 + 2xy) dy = 0$  , (d)  $y(e^x - 1) dx + (e^x + 1) dy = 0$   
 (e)  $(x + 2y) dx + (x + 2y + 1) dy = 0$  , (f)  $(y + 2e^x) dx + dy = 0$

۲. اگر  $I$  و  $J$  دو عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل غیرکامل  $M dx + N dy = 0$  باشند، نشان دهید  
 برای  $I + kJ$  هر ثابت  $k$  عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل خواهد بود.

### ۱.۱۰.۱ عامل دیفرانسیل‌ساز

استفاده از دیفرانسیل برخی از عبارات باعث سهولت در یافتن جواب بعضی از معادلات می‌گردد. برای مثال از آنجائیکه  
 $x dy + y dx = d(xy)$  است، با داشتن عبارت  $x dy + y dx$  و جایگذاری  $d(xy)$  بجای آن ب راحتی عبارت  
 قابل انتگرال‌گیری است. به مثال زیر توجه نمایید:

مثال ۱.۱۰.۱. حل معادله  $(y - x^2) dx + x dy = 0$ .

حل. با نگارش معادله بشکل  $x^2 dx + y dx = x^2 dx$  و از آنجائیکه  $d(xy) = x dy + y dx$  عبارت  
 دیفرانسیلی کاملست، بنابراین

$$\begin{aligned} y dx + x dy &= x^2 dx \\ d(xy) &= x^2 dx \\ \int d(xy) &= \int x^2 dx + C, \quad \left( \int du = u \right) \\ xy &= \frac{1}{3} x^3 + C \\ y &= \frac{1}{3} x^2 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

□

بعضی از عبارات بصورت ترکیبی از چند عبارتند. مثلاً چون

$$\frac{x dy - y dx}{xy} = d \left( \ln \left| \frac{y}{x} \right| \right)$$

بنابراین عبارت  $x dy - y dx$  در صورت، نیاز به عامل  $xy$  در مخرج دارد تا به عبارت کامل دیفرانسیلی مبدل شود.  
 در اینگونه موارد با یافتن بهترین عامل دیفرانسیل‌ساز می‌توان معادله را به ساده‌ترین شکل حل نمود. کاربردی‌ترین  
 عبارات دارای دیفرانسیل کامل در جدول ذیل آمده است:

عبارت	عامل ضربی	دیفرانسیل ایجاد شده
$y dx + x dy$	—	$x dy + y dx = d(xy)$
$y dx - x dy$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$y dx - x dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
$y dx - x dy$	$\frac{-1}{xy}$	$\frac{x dy - y dx}{xy} = d\left(\ln\left \frac{y}{x}\right \right)$
$y dx - x dy$	$\frac{-1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$
$y dx + x dy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{y dx + x dy}{xy} = d(\ln xy )$
$y dx + x dy$	$\frac{1}{(xy)^n}, (n > 1)$	$\frac{y dx + x dy}{(xy)^n} = d\left(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right)$
$y dy + x dx$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{y dy + x dx}{x^2 + y^2} = d\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right)$
$y dy + x dx$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}, (n > 1)$	$\frac{y dy + x dx}{(x^2 + y^2)^n} = d\left(\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}}\right)$
$ay dx + bx dy$	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(ay dx + bx dy) = d(x^a y^b)$

آنگونه در این جدول می بینید بر حسب عبارت موجود می بایست عامل دیفرانسیل ساز را در معادله ضرب نمود تا عبارت کامل دیفرانسیلی پدید آید. به مثالهای ذیل توجه نمائید:

**مثال ۲.۱۰.۱.** مطلوبست حل معادله  $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2 y^2 - 1)}{x}$  **حل.**

$$\begin{aligned} y dx + x dy &= x^2 y^2 dx \\ \frac{y dx + x dy}{x^2 y^2} &= x^2 dx \\ \int d\left(\frac{-1}{2x^2 y^2}\right) &= \int x^2 dx + C \quad \text{فرمول شماره ۷ جدول} \\ \frac{-1}{2x^2 y^2} &= \frac{x^3}{3} + C \\ \Rightarrow 2x^2 y^2 + 6Cx^3 y^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

□

**مثال ۲.۱۰.۱.** حل معادله  $ty' = 5t^2 - 2y$  **حل.** پس از ساده کردن معادله بصورت  $2y dt + t dy = 5t^2 dt$  از مقایسه طرف چپ با فرمول شماره (۱۰)

جدول، دیده می شود که می بایست  $a = 2$  و  $b = 1$  بوده و بنابراین عامل ضربی

$$t^{2-1}y^{1-1} = t$$

خواهد بود. با ضرب طرفین معادله در  $t$  داریم  $5t^2 dy = t^2 dy + t^2 dt$  یا  $d(t^2 y) = d(t^2)$  و جواب معادله پس از ساده نمودن آن  $y = t^2 + Ct^{-2}$  است. □

تمرین ۱۱.۱. موارد زیر را با عامل دیفرانسیل ساز حل کنید.

$$(a) \quad (y - 2xy^2) dx - x dy = 0, \quad (b) \quad y(1 + x^2 y) dx + x dy = 0$$

$$(c) \quad (2 + ye^{xy}) dx + (xe^{xy} - 2) dy = 0, \quad (d) \quad (2y - xe^{xy})y' = 2 + ye^{xy}$$

## ۱۲.۱ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

معادله خطی مرتبه اول بصورت

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (۶)$$

است که  $p(x)$  و  $q(x)$  توابعی از  $x$  هستند. اگر  $p = 0$  معادله بشکل  $y' = q(x)$  در می آید که توسط انتگرال معمولی  $y = \int q(x) dx + C$  جواب حاصل می شود. اگر  $q = 0$  معادله بصورت  $y' = -p(x)y$  در می آید که **تفکیک پذیر** بوده و حاصل آن  $y = e^{\int -p(x) dx} + C$  خواهد بود. در حالت کلی که  $p, q \neq 0$  است، معادله (۶) شکل

$$(py - q) dx + dy = 0$$

را بخود می گیرد و از آنجا که  $p = \frac{\partial M}{\partial x} = 0$  و  $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$  پس (۶) معادله ای غیر کامل است و جهت حل دو روش ذیل پیشنهاد می شود. دقت نمایید که این معادله می بایست لزوماً مرتبه اول و قابل تبدیل به درجه اول باشد و مثلاً معادله  $e^{3xy} + (y')^2 = 0$  قابل حل با این روشها نیست.

### ۱۲.۱.۱ حل روش عامل انتگرال ساز

اگر  $I$  **عامل انتگرال ساز** برای طرف چپ معادله (۶) باشد یعنی  $Iy' + Ipy = Iq$  برای اینکه طرف چپ معادله ای کامل باشد بایستی  $Iy' + Ipy = (Iy)'$  و در نتیجه

$$\begin{cases} Ipy = I'y \\ (Iy)' = Iq \end{cases}$$

که دو فرمول زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} I(x) = e^{\int p(x) dx} & , (۷) \\ Iy = \int Iq dx + C & . (۸) \end{cases}$$

و (۷) همان مقدار **عامل انتگرال ساز** خواهد بود. این فرمول تضمین می کند که اگر طرفین (۶) را در آن ضرب کنیم طرف چپ حتماً دارای دیفرانسیل کامل خواهد شد. سپس از (۸) نتیجه حاصل می شود.

**مثال ۱.۱۲.۱.** حل معادله  $y' - 3y = 6$ .  
**حل.** با داشتن  $p = -3$  عامل انتگرال‌ساز برابر است با

$$I(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int -3 dx} = e^{-3x}$$

با جایگذاری در (۸) داریم

$$ye^{-3x} = \int 6e^{-3x} dx + C$$

□

و جواب عمومی  $y = -2 + Ce^{3x}$  خواهد شد.

**مثال ۲.۱۲.۱.** مطلوبست حل معادله

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 2$$

**حل.** چون معادله خطی مرتبه اول است با  $p = -\frac{4}{x}$  و  $q = 2$  طبق (۷) می‌نویسیم:

$$I(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4}$$

$$Iv = \int Iq(x) dx + C \quad \text{طبق (۸)}$$

$$\frac{1}{x^4}v = \int \frac{1}{x^4} 2 dx + C$$

$$v = x^4 \left( -\frac{2}{3x^3} + C \right)$$

$$v = -\frac{2}{3}x + Cx^4$$

□

**۲.۱۲.۱ حل بروش تغییر پارامتر**

هرچند این روش ایده‌ای کاملاً زیباست ولی نسبت به روش قبلی مقبولیت کمتری دارد. در این روش با فرض  $q = 0$  معادله  $y' + p(x)y = 0$  را حل کرده و جواب عمومی را بصورت

$$y = Ce^{\int -p(x) dx}$$

بدست می‌آوریم. اکنون پارامتر  $C$  را برابر تابع متغیری مانند  $u$  فرض نموده و با مشتق‌گیری و جایگذاری در (۶) مقدار تابع  $u$  را حساب می‌کنیم.



مثال ۳.۱۲.۱. مطلوبست حل معادله مثال ۲.۱۲.۱ با روش تغییر پارامتر

حل.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= \frac{1}{x} dx \\ v &= Cx \\ v &= ux \quad \text{تغییر پارامتر} \\ v' &= u'x + x' \cdot u = u'x + \frac{1}{x}v \\ v' - \frac{v}{x} &= u'x \\ 0 &= u'x \\ u &= -\frac{1}{3x^2} + k \\ v &= -\frac{1}{3}x + kx^2 \end{aligned}$$

□

تمرین ۱۳.۱ .

۱. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} (a) \quad y' + 3y &= 0, & (b) \quad t \frac{dy}{dt} - 2y &= t^2 \cos 3t \\ (c) \quad \frac{dy}{dt} + \frac{5}{t}y &= 0, & (d) \quad y' + y &= \sin x \\ (e) \quad (e^x - 1)y' + e^xy &= 0, & (f) \quad v' + \frac{1}{t}v &= 2 \cos 2t \\ (g) \quad y' + 2xy &= 3x, & (h) \quad \frac{dv}{dt} + v &= 2 \sin t \\ (i) \quad \frac{dv}{dt} + vt &= -2t, & (j) \quad y'(\sin x \cos^2 x) + y \cos 2x \cos^2 x &= 1 \end{aligned}$$

۲. در یک معادله خطی مرتبه اول به شکل  $y' + py = q(x)$  که در آن مقدار  $p$  تنها یک ثابت عددی است، می نویسیم:

$$I(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{px} \Rightarrow ye^{px} = \int e^{px} q(x) dx + C \Rightarrow y = e^{-px} \left( \int e^{px} q(x) dx + C \right)$$

که جواب بشکل ساده تری بدست خواهد آمد. با این فرمول ساده شده، معادلات زیر را حل نمایید.

$$(k) \quad y' - 6y = 5, \quad (l) \quad y' + 2y = 2x^2$$

## ۱۴.۱ معادله برنولی

معادله مرتبه اول به شکل

$$y' + p(x)y = q(x)y^\beta \quad (2.1)$$

را بازای  $\beta \neq 0, 1$  حقیقی، **معادله برنولی** گوئیم. روش حل این معادله به این طریق است که با جانشینی  $u = y^{1-\beta}$  و اینکه  $y = u^{\frac{1}{1-\beta}}$  و سپس دیفرانسیل از طرفین داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\beta} u^{\frac{\beta}{1-\beta}} \frac{du}{dx}$$

با جایگذاری در معادله اولیه و ساده کردن آن، معادله به شکل ساده

$$\frac{1}{1-\beta} u' + pu = q$$

یا

$$u' + (1-\beta)pu = (1-\beta)q \quad (3.1)$$

در می آید که معادله‌ای خطی از مرتبه اول است. همچنین **معادله برنولی** را می توان با تغییر متغیر  $y = uv$  یا تغییر پارامتر نیز حل نمود.

**مثال ۱۴.۱.۱.** حل معادله برنولی  $y' - \frac{1}{2x}y = 6x^3y^5$ .

**حل.** چون  $\beta = 5$  با جانشینی  $u = y^{-4}$  داریم  $u' + \frac{2}{x}u = -24x^3$  که معادله‌ای خطی از مرتبه اول است و از آنجا که  $p = \frac{2}{x}$  با بدست آوردن **عامل انتگرال‌ساز**  $I = x^2$  می نویسیم:

$$x^2 u = \int x^2 (-24x^3) dx + C$$

پس

$$u = \frac{C - 4x^6}{x^2}$$

و از اینجا

$$y = u^{-\frac{1}{4}} = \left( \frac{C - 4x^6}{x^2} \right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{x^2}{C - 4x^6}}$$

□

که برای  $x \leq \sqrt[4]{C/4}$  جواب معادله است.

**مثال ۲.۱۴.۱.** مطلوبست جواب خصوصی معادلهٔ برنولی  $xy' + 4xy = xy^2$  با شرط  $y(0) = 2$ .

**حل.** برای  $\beta = 2$  چون  $u = y^{1-\beta} = \frac{1}{y}$  یا  $y = \frac{1}{u}$  پس  $y' = -\frac{u'}{u^2}$  با جایگذاری در معادله می نویسیم:

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} + 4x\frac{1}{u} &= x\frac{1}{u^2} \\ -u' + 4xu &= x \\ -u' &= x(-4u + 1) \quad \text{تفکیک پذیر} \\ \frac{du}{dx} &= x(4u - 1) \\ \int \frac{du}{4u - 1} &= \int x dx + C \\ \frac{1}{4} \ln |4u - 1| &= \frac{1}{2} x^2 + C \\ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{4}{y} - 1 \right| &= \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

□ با لحاظ شرط اولیه  $y(0) = 2$  مقدار  $C = 2$  شده و جواب خصوصی معادله عبارتست از  $y = \frac{4}{e^{2x^2} + 1}$ .

**مثال ۲.۱۴.۱.** مطلوبست حل معادلهٔ  $x dy - y dx - xy^2 \ln x dx = 0$ .

**حل.** با ساده کردن معادله بصورت

$$y' - \frac{1}{x}y = y^2 \ln x$$

معادلهٔ برنولی با  $\beta = 3$  است. بنابراین با جانشینی  $u = y^{-2}$  و دیفرانسیل از طرفین داریم

$$u' = -2y^{-3}y'$$

و با جایگذاری چنین بدست می آید:

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = -2 \ln x$$

این معادله خطی مرتبه اول با عامل انتگرال‌ساز  $x^2 = e^{\int p(x) dx} = e^{2 \ln x} = x^2$  می باشد که با ضرب طرفین آن در  $x^2$  داریم

$$x^2 u = -2 \int x^2 \ln x dx + C$$

و جواب عمومی عبارتست از تابع ضمنی

$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{9} x^2 (3 \ln x - 1) + C$$

□

## ۱۵.۱ معادله ریگاتی

**معادله ریگاتی** به شکل کلی  $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha + r(x)$  است <sup>۶</sup> که اگر  $r = 0$  معادله **برنولی** با  $\beta = 2$  بوده و اگر  $q(x) = 0$  باشد، خطی مرتبه اول است. حالت کلی معادله **ریگاتی** تنها وقتی قابل حل است که یک جواب خصوصی آن مثلاً  $y_p$  معلوم باشد و با فرض  $y = \frac{1}{u} + y_p$  مسئله را بر حسب  $u$  به معادله مرتبه اول به فرم  $u' - (p + 2qy_p)u = -q$  تبدیل خواهیم کرد.

**مثال ۱.۱۵.۱.** حل معادله ریگاتی  $x(x^2 - 1)y' = y^2 - y + x^2(y - 1)$  که جواب خصوصی  $y_p = x^2$  از آن معلوم است.

**حل.** قبل از حل می توان معادله را به شکل معادله ریگاتی درآورد یعنی

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2 - 1)}y^2 - \frac{x}{x^2 - 1}$$

حال با فرض  $y = \frac{1}{u} + x^2$  و  $y' = -\frac{u'}{u^2} + 2x$  و جایگذاری در معادله داریم:

$$u' + \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}u = -\frac{1}{x^3 - x}$$

که معادله خطی مرتبه اول با  $p(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$  بوده و با **عامل انگرالساز**  $I = x^3 - x$  جواب  $u = \frac{C - x}{x^3 - x}$  را نتیجه می دهد و بالاخره  $y = \frac{Cx^2 - x}{C - x}$  جواب عمومی معادله است. □

تمرین ۱۶.۱ .

۱. معادلات **برنولی** زیر را حل نمائید.

$$(a) 2y \frac{dy}{dx} + 1 = \frac{1}{x}y^2, \quad (b) \frac{x}{dx} \frac{dy}{dx} + y = -x^2y^2$$

$$(c) y' + \frac{5}{y}x^3y = \frac{2}{xy}, \quad (d) y' - \frac{4}{x}y - x\sqrt{y} = 0$$

۲. معادلات **ریگاتی** زیر، که یک جواب خصوصی آنها داده شده را حل کنید.

$$(e) y' - 3xy = -y^2 + 1 - 2x^2, \quad y_p = x$$

$$(f) y' - 4xy = 4 - 2y^2 - 4x, \quad y_p = 2x - 1$$

<sup>۶</sup> در واقع معادله ای که توسط **ریگاتی** حل شده بصورت  $y' + by^\alpha = cx^m$  بود و معادله فوق توسط **برنولی** حل شد. ولی بهر حال به نام **ریگاتی** مشهور است.

## ۱۷.۱ معادلات درجات بالاتر

برای معادلات مرتبه اولی که دارای درجه بیشتر از یک هستند روش حل کلی وجود ندارد ولی در برخی حالات خاص می توان آنها را حل نمود. برای مثال معادله  $x = x - 2xy' + (y')^2$  بر حسب  $y'$  معادله معمولی درجه دو بوده و به راحتی قابل حل است. بنابراین با روشهای موجود و یا روشهای تجربی ممکن است بتوان چنین معادلاتی را حل نمود. البته باید توجه داشت که جوابهای حاصل در این نوع معادله لزوماً بطور صریح جواب عمومی یا خصوصی نبوده و ممکن است جواب غیرعادی و یا پوش منحنی های جواب باشد، لذا صحت جواب بدست آمده نیازمند بررسی خواهد بود. اینک چند روش را بررسی می کنیم.

### ۱.۱۷.۱ معادله درجه دو

اگر معادله دیفرانسیل بصورت  $f(x, y, y') = 0$  و از درجه دوم باشد، با حل معادله نسبت به مجهول  $y'$  دو معادله  $y' = f(x, y)$  و  $y' = g(x, y)$  بدست می آید. فرض کنید که جواب این دو معادله بترتیب  $F(x, y, C) = 0$  و  $G(x, y, C) = 0$  باشد، از آنجا که هر جواب معادله اصلی حداقل در یکی از این دو معادله صدق می کند لذا جواب نهائی احتمالی به شکل

$$F(x, y, C)G(x, y, C) = 0$$

خواهد بود. پس از آن باید صحت جواب حاصل بررسی گردد.

**مثال ۱.۱۷.۱.** حل معادله  $(y')^2 - 4x^2 = 0$ .

**حل.** این معادله مرتبه اول و درجه دوم دارای دو ریشه  $y' = \pm 2x$  است. با حل این دو معادله و یافتن جوابهای  $y = x^2 + C$  و  $y = -x^2 + C$  جواب نهائی عبارتست از

$$(y - x^2 - C)(y + x^2 - C) = 0$$

□

یا  $x^4 = (y - C)^2$ . به آسانی می توان دید که جواب ها در معادله صدق می کنند.

**مثال ۲.۱۷.۱.** حل معادله  $x^2(y')^2 + 9 = 2xyy' + 8y^2$

**حل.** با ساده کردن معادله به عبارت زیر می رسیم

$$x^2(y')^2 + y^2 - 2xyy' = 9y^2 - 9x^2$$

که طرف چپ اتحادی جبری است و

$$(xy' - y)^2 = 9(y^2 - x^2)$$

این معادله مرتبه اول درجه دوم دارای دو ریشه  $y' = \frac{y \pm 3\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$  است که طرف راست تابعی همگن درجه صفر است و با کمی تغییر برابرست با

$$y' = \frac{y}{x} \pm 3\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$$

با حل این دو معادله همگن و یافتن جوابهای  $y = x \cosh(\ln(Cx^3))$  و  $y = x \cosh(\ln(\frac{C}{x^3}))$  جواب نهائی

$$\left[ y - x \cosh\left(\ln\left(\frac{C}{x^3}\right)\right) \right] \left[ y - x \cosh\left(\ln(Cx^3)\right) \right] = 0$$

□

است.

### ۲.۱۷.۱ حل معادله با وارد کردن پارامتر

اگر معادله دیفرانسیل بشکل  $x = f(y, y')$  باشد با فرض  $y' = p$  و دیفرانسیل از طرفین معادله  $x = f(y, p)$  می توان دستگاه زیر را تشکیل داد و  $y$  و  $x$  را بدست آورد.

$$x = f(y, p), \quad \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}$$

اگر معادله دیفرانسیل بشکل  $y = f(x, y')$  باشد با فرض  $y' = p$  و دیفرانسیل از طرفین معادله  $y = f(x, p)$  دستگاه زیر را تشکیل داده و  $y$  و  $x$  را بدست می آوریم.

$$y = f(x, p), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

**مثال ۳.۱۷.۱.** حل معادله  $y = xy'^2 - \frac{1}{4}$ .

**حل.** در این معادله درجه دوم با جانشینی  $y' = p$  و دیفرانسیل از طرفین معادله بر حسب  $x$  داریم:

$$y = xp^2 - \frac{1}{4}$$

$$y' = p = p^2 + 2xp \frac{dp}{dx}$$

$$0 = p^2 - p + 2xp \frac{dp}{dx}$$

$$0 = p \left( p - 1 + 2x \frac{dp}{dx} \right)$$

•  $p = 0$  نتیجه می دهد که  $y = -\frac{1}{4}$  جواب خاص بوده و اگر  $0 = p - 1 + 2x \frac{dp}{dx}$  باشد، با حل این معادله

**تکنیک پذیر**، جواب عمومی  $y = x + C\sqrt{x} + C^2 - \frac{1}{4}$  حاصل می گردد. □

### ۳.۱۷.۱ معادلات لاگرانژ و کلرو

شکل کلی معادله لاگرانژ بصورت  $y = xf(y') + g(y')$  است که  $f$  و  $g$  توابعی از  $y'$  بوده و با فرض  $y' = p$  معادله به شکل

$$y = xf(p) + g(p) \quad (۴.۱)$$

در می آید. برای حل معادله دو حالت وجود دارد:

الف) اگر  $f(p) = p$  باشد (که در این حالت معادله (۴.۱) را **معادله کلرو** نامند) از عبارت  $y = xp + g(p)$  نسبت به  $x$  مشتق می گیریم

$$y' = p + x \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

چون  $y' = p$  با ساده کردن عبارت داریم  $\frac{dp}{dx}(x + g'(p)) = 0$  که یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \begin{cases} x = -g'(p) \\ y = xp + g(p) \end{cases}$$

در حالت نخست با فرض  $p = p_0$  جواب  $y = p_0 x + C$  می‌آید که با جایگذاری در معادله نخست  $C = g(p_0)$  بوده و لذا  $y = p_0 x + g(p_0)$  که **جوابی غیرعادی** است، حاصل می‌گردد. در حالت دستگاه نیز پارامتر  $p$  را حذف و جواب معادله را که **پوش منحنی‌های جواب** است بدست می‌آوریم. (ب) اگر  $f(p) \neq p$  در این حالت نیز با مشتق از طرفین معادله لاگرانژ (۴.۱) نسبت به  $x$  می‌نویسیم:

$$y' = f(p) + x f'(p) \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

و

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}(x f'(p) + g'(p))$$

و آن را بصورت معادله  $\frac{dx}{dp}(p - f(p)) - x f'(p) = g'(p)$  یا

$$\frac{dx}{dp} + \frac{-f'(p)}{p - f(p)} x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$

نوشته که معادله خطی مرتبه اول از  $x$  نسبت به  $p$  است. اگر  $x = C f_1(p) + g_1(p)$  جواب عمومی این معادله باشد، با حذف  $p$  از دستگاه

$$\begin{cases} x = C f_1(p) + g_1(p) \\ y = x f(p) + g(p) \end{cases}$$

جواب عمومی معادله لاگرانژ حاصل می‌گردد.

**مثال ۴.۱۷.۱.** حل معادله لاگرانژ  $y = 2y'x + 4(y')^2$ .

**حل.** با تغییر  $p = y'$  معادله را بصورت  $y = 2px + 4p^2$  نوشته که طبق روش گفته شده چنین داریم:

$$y = 2px + 4p^2$$

$$y' = 2 \frac{dp}{dx} x + 2p + 8p \frac{dp}{dx}$$

$$p = 2 \frac{dp}{dx} x + 2p + 8p \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = -6p$$
 معادله خطی مرتبه اول

$$x = -3p^2 + \frac{C}{p}$$

برای حل دستگاه

$$\begin{cases} x = -3p^2 + \frac{C}{p} \\ y = 2px + 4p^2 \end{cases}$$

مقدار  $p$  را از معادله اول بصورت

$$p^{\sqrt{}} = \frac{1}{\epsilon}(-x \pm \sqrt{x^{\sqrt{}} + 12C})$$

یافته و با جایگذاری در معادله دوم، عبارت

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{\epsilon}(-x \pm \sqrt{x^{\sqrt{}} + 12C})(2x \pm \sqrt{x^{\sqrt{}} + 12C})}$$

□

جواب عمومی معادله می باشد.

**مثال ۵.۱۷.۱.** مطلوبست حل معادله کلرو  $y = xp + p^{\sqrt{}} - 4p$  که  $y = xp + p^{\sqrt{}}$  با مشتقگیری از طرفین معادله

$$\begin{aligned} y' &= p + xp' + 2pp' - 4p' \\ p &= p + xp' + 2pp' - 4p' \\ \Rightarrow p'(x + 2p - 4) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} y = p \cdot x + C \\ p = \frac{1}{4}(4 - x) \end{cases} \end{aligned}$$

مقدار  $y = p \cdot x + p^{\sqrt{}} - 4p$  جواب غیرعادی معادله است و از دومی، با قرار دادن مقدار  $p$  در معادله اصلی و ساده کردن آن جواب خصوصی عبارتست از

$$y = -\frac{1}{4}(x - 4)^{\sqrt{}}$$

□

**مثال ۶.۱۷.۱.** حل معادله لاگرانژ  $y = x + 3(y')^{\sqrt{}} - 2(y')^{\sqrt{}}$  با مشتقگیری از طرفین معادله  $y = x + 3p^{\sqrt{}} - 2p^{\sqrt{}}$  چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} y' = p &= 1 + 2p \frac{dp}{dx} - 2p^{\sqrt{}} \frac{dp}{dx} \\ (p - 1) - (2p - 2p^{\sqrt{}}) \frac{dp}{dx} &= 0 \\ (p - 1)(1 + 2p \frac{dp}{dx}) &= 0 \end{aligned}$$

اگر  $1 + 2p \frac{dp}{dx} = 0$  داریم  $x + p^{\sqrt{}} = C$  که با در نظر گرفتن معادله اصلی و حذف پارامتر  $p$  نتیجه می دهد  $y = C - \frac{2}{3}(C - x)^{\frac{3}{\sqrt{}}}$  و یا  $y = C - \frac{2}{3}(C - x)^{\sqrt{}}$  که جواب عمومی معادله است. در حالت دوم که

□

$p = 1$  پس  $y = x + \frac{1}{3}$  که در واقع پوش منحنی های فوق محسوب می شود.



تمرین ۱۸۰.۱. معادلات زیر، که در آنها  $p = y'$  است را حل کنید.

$$(a) \quad y = px + p^\gamma - 1 \quad , \quad (b) \quad y = xp - p$$

$$(c) \quad xp^\gamma + \gamma xp - y = 0 \quad , \quad (d) \quad y = p^\gamma e^{-x} + 1$$

تمرین ۱۹۰.۱. تمرینات تکمیلی.

۱. معادله دیفرانسیل مختص به تابع  $y = C_1 e^x + C_2 e^{\gamma x} + C_3 e^{\gamma^2 x}$  را بنویسید.

۲. مرتبه، درجه و خطی بودن هر کدام از معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید.

$$(a) \quad y^{(\Delta)} - \gamma e^x y = xy \quad , \quad (b) \quad (y' + 1)(y'' + 1) = x^\gamma$$

$$(c) \quad y''' - x e^y = y e^x \quad , \quad (d) \quad (y^{(\gamma)})^\gamma + y^{(\delta)} + y'' \cos x = 0$$

$$(e) \quad y'' + y' + y = \sin y' \quad , \quad (f) \quad y' = x \ln y + y \ln x$$

۳. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را با روش دلخواه حل کنید. در مواردی که شرط اولیه داده شده جواب خصوصی را هم بیابید.

(۱)	$\gamma xy \, dx + (x^\gamma + x^\gamma y^\gamma) \, dy = 0$	(۲)	$y' + \lambda y = \Delta$
(۳)	$\gamma \rho \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{\rho} \quad , \quad \rho\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma}$	(۴)	$\frac{dv}{dx} - \frac{\gamma}{x} v = \frac{\gamma}{x^\gamma}$
(۵)	$(xy^\gamma) \, dx + (x^\gamma y^\gamma + x^\gamma y) \, dy = 0$	(۶)	$y' + \frac{\gamma}{x} y = x^\gamma$
(۷)	$(x^\gamma y^\gamma - y) \, dx + (x^\gamma y^\Delta - x) \, dy = 0$	(۸)	$\dot{x} - \frac{\gamma}{t} x = \delta tx^\gamma$
(۹)	$x^\gamma y' \sin y = \gamma x \cos y + \gamma$	(۱۰)	$y' = \frac{\gamma x^\gamma y}{x^\gamma + \gamma y^\gamma}$
(۱۱)	$(y + \delta x^\Delta) \, dx + (x - \gamma y^\gamma) \, dy = 0$	(۱۲)	$y' = -\frac{\gamma y^\gamma + 1}{\gamma xy^\gamma}$
(۱۳)	$(1 + \frac{y}{x} \tan \frac{y}{x}) \, dy = (\frac{y}{x} + \frac{y^\gamma}{x^\gamma} \tan \frac{y}{x}) \, dx$	(۱۴)	$y' = \gamma xy - x^\gamma$
(۱۵)	$y(x^\gamma y^\gamma + \gamma) \, dx + x(\gamma - \gamma x^\gamma y^\gamma) \, dx = 0$	(۱۶)	$y' = \frac{\ln x}{\gamma xy}$
(۱۷)	$(x^\gamma + y^\gamma + 1) \, dx - (xy + y) \, dy = 0$	(۱۸)	$xy' + y = -\tan x$
(۱۹)	$(x + \gamma) \frac{dy}{dx} - y = \gamma(x - \gamma)^\gamma$	(۲۰)	$\frac{dv}{dx} - \frac{\gamma}{x} v = -\frac{1}{x^\gamma}$
(۲۱)	$y \ln y \, dx + (x - \ln y) \, dy = 0$	(۲۲)	$y' = \frac{x^\gamma y^\delta - y}{x}$
(۲۳)	$dx + x \, dy = \gamma \cos y \, dy$	(۲۴)	$\dot{x} = \frac{x^\gamma - t}{\gamma tx}$
(۲۵)	$(x + y^\gamma + \gamma x^\gamma) \, dy - y \, dx = 0$	(۲۶)	$y' + xy = \gamma xy^\gamma$
(۲۷)	$(xy - 1) \, dx + (x^\gamma - xy) \, dy = 0$	(۲۸)	$dy + y \, dx = y^\gamma e^x \, dx$
(۲۹)	$t \frac{dy}{dt} + y = t^\gamma \quad , \quad y(-1) = \gamma$	(۳۰)	$y' = \frac{1 - \gamma y}{x^\gamma}$

- (۳۱)  $\frac{dx}{dt} = \frac{3t^x + x^t}{2xt}$  ,  $x(2) = -4$  , (۳۲)  $y' = \frac{-3y}{2x + xy^t}$
- (۳۳)  $(x^t + y^t + x) dx + xy dy = 0$  , (۳۴)  $\dot{x} = \frac{x + \ln t}{t}$
- (۳۵)  $\frac{y}{x} dx + (y^t - \ln x) dy = 0$  , (۳۶)  $y - xy' = \sqrt{1 + y^t}$
- (۳۷)  $y = x + \frac{1}{y} y^t$  , (۳۸)  $y = 2xy' + \frac{1}{y'}$
- (۳۹)  $y dx + (2x - ye^y) dy = 0$  , (۴۰)  $\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{t(t^x x + 1)}$
- (۴۱)  $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1 + x^t} = 0$  ,  $y(2) = 3$  , (۴۲)  $xy' + y = x^t y^t$
- (۴۳)  $y \sin \frac{x}{y} - (x \sin \frac{x}{y} + y) y' = 0$  , (۴۴)  $y = \frac{xy'}{2} + \frac{2x}{y'}$
- (۴۵)  $y^t = y + xy' - \frac{1}{y} x^t$  , (۴۶)  $yy^t + y = 2xy'$
- (۴۷)  $(x^t - y^t) y' = xy$  , (۴۸)  $y = (x + \ln y') y'$
- (۴۹)  $dx + (2y + x + e^y) dy = 0$  , (۵۰)  $y^t e^y y' + xy' = y$
- (۵۱)  $(xy' - y)^t = (y')^2$  , (۶۴)  $(2xe^y + y^t) y' = ye^y$
- (۵۳)  $y' + y = \frac{1}{e^{2x} + 1}$  ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$  , (۵۴)  $x dy + y dx = x^t dy$
- (۵۵)  $x^t y^t + xyy' = 2y^t$  , (۵۶)  $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = x^t y^{\frac{1}{2}}$
- (۵۷)  $y' + 3t^y = 3t^y y^t$  ,  $y(0) = \frac{1}{2}$  , (۵۸)  $\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2t} x = \frac{-x^t}{2} \cos t$
- (۵۹)  $y' + 2y = y^t (\sin x - \cos x)$  , (۶۰)  $\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t} z = -z^2$
- (۶۱)  $y = x(y^t - y') + (y' - 3)$  , (۶۲)  $y' + \frac{y}{x} = x^t y^t$
- (۶۳)  $(x^t + y^t) dx - xy dy = 0$  , (۶۴)  $y' = (x - y - 2)^t$
- (۶۵)  $(3x^2 + 4y - 2) y' = x^2$  , (۶۶)  $x(y' - 1)(x + 1) = y$
- (۶۷)  $xy(1 + y^t) = (x^t + y^t) y'$  , (۶۸)  $xy' = \sqrt{x^t + y^t} - x$
- (۶۹)  $(1 + x^t) y' - 2xy = (1 + x^t)^t$  , (۷۰)  $y' - y \tan x = \sec x$
- (۷۱)  $y^t y^t - xyy^t = y$  , (۷۲)  $xy' + 2y = 2xyy'$
- (۷۳)  $(2xy^t e^y + 2y^t x + y) dx + (x^t y^t e^y - x^t y^t - 3x) dy = 0$
- (۷۴)  $(2x - y - 1) dx + (3y - 4x + 2) dy = 0$
- (۷۵)  $(x \sin y + y \cos y) dx + (x \cos y - y \sin y) dy = 0$
- (۷۶)  $(1 + e^y) \csc^t x dx + e^y \cot x dy = 0$
- (۷۷)  $(2x + 3y - 6) dx + (4x + 6y - 15) dy = 0$
- (۷۸)  $(6x^2 - 12x^t y^t - 9x^t) dx + (2x^t y - 4y^t) dy = 0$
- (۷۹)  $xy(xy^t + 1) dy = dx$
- (۸۰)  $y + \sin x \cos^t(xy) dx + (x + \sin y \cos^t(xy)) dy = 0$

۴. معادله غیرخطی  $y' + py = qy \ln y$  دارای شکلی شبیه **معادله برنولی** است که در آن  $p$  و  $q$  توابعی از  $x$  - اند. این معادله را با تغییر متغیر  $y = e^z$  می توان به معادله خطی مرتبه اول تبدیل نمود. این تبدیل را انجام داده و پس از یافتن شکل نهایی معادلات زیر را حل نمایید.

$$(a) \quad y' + 2y = 3y \ln y, \quad (b) \quad xy' + 4x^2 \sin^2 x \cdot y = y \ln y$$

$$(c) \quad (x^2 + 1)y' + 4xy = 4xy \ln y, \quad (d) \quad xy' - 5x^2 y = -2y \ln y$$

۵. نشان دهید که  $y = -x$  یک جواب غیرعادی معادله  $yy' + xy = -xy' - y^2$  است.

۶. **معادله برنولی (۲.۱)** را برای  $\beta \neq 1$  در نظر بگیرید. با استفاده از معادله (۳.۱) نشان دهید جواب نهایی **معادله برنولی** عبارتست از

$$y = \left( \frac{(1 - \beta) \int e^{(1-\beta) \int p(x) dx} q(x) dx + C}{e^{(1-\beta) \int p(x) dx}} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

در مسائل ساختنی زیر، با در نظر گرفتن شکل تقریبی تابع و مشتق در نقطه تماس بعنوان شیب خط مماس و نکات کمکی دیگر در مسئله، منحنی مورد نظر را بیابید.

۷. معادله منحنی را بیابید که در آن پاره خط مماس محدود به محورهای مختصات، برابر باشد با فاصله نقطه تماس از مبدأ مختصات.

۸. مطلوبست معادله منحنی که در آن پاره خط قائم در هر نقطه منحنی که محدود به محورهای مختصات است در همین نقطه نصف شود.

۹. معادله منحنی که پاره خط مماس محدود به محورهای مختصات برابر مقدار ثابتی باشد.

۱۰. معادله منحنی را بیابید که شیب خط مماس در هر نقطه آن، برابر مجموع مختصات نقطه تماس باشد.

۱۱. مطلوبست معادله منحنی که فاصله یک نقطه مفروض از مماسهای بر آن مقدار ثابتی باشد.

۱۲. مطلوبست معادله منحنی که در آن، مساحت مثلثی که از مماس بر هر نقطه دلخواه آن با محورهای مختصات می سازد مقدار ثابتی باشد.

۱۳. معادله منحنی را بیابید که پاره خط مماس بر آن، محدود به محورهای مختصات در نقطه تماس نصف شده باشد.

۱۴. معادله منحنی را بیابید که مجموع پاره خطهایی که مماس بر هر نقطه آن روی محورهای مختصات بوجود می آورد عددی ثابت باشد.

۱۵. معادله منحنی که زاویه بین مماس و شعاع حامل نقطه تماس آن مقدار ثابتی باشد.

۱۶. معادله منحنی را بیابید که پاره خطی که مماس روی محور طولها جدا می کند مساوی طول این پاره خط باشد.

۱۷. معادله منحنی را بیابید چنانکه مساحت مثلثی که اضلاع آن عبارتند از خط مماس، شعاع حامل نقطه ی تماس و محور طولها، عددی ثابت باشد.